Prof. Dr. Alfred Toth

Zeichen und Quaternion

1. Im Gegensatz zum Verhältnis von Zeichen und den zweidimensionalen komplexen Zahlen, das Gegenstand von Toth (2012a) war, stellen Quaternionen vierdimensionale Zahlen der allgemeinen Form

$x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$

dar, d.h. sie besitzen einen einfachen Realteil und einen dreifachen Imaginärteil. Nun wissen wir bereits, daß wir die Peircesche Zeichenrelation als komplexe Zahlenrelation durch

$ZR_{\mathbb{C}} = (3i.a, 2i.b, 1i.c) \times (c.i1, b.i2, a.i3)$,

d.h. durch die beiden links- und rechtsordinalen (vgl. Toth 2012b) Mengen von Primzeichen

$P_1 = \{1., 2., 3.\} \in \mathbb{I}$

$P_2 = \{.1, .2, .3\} \in \mathbb{R}$,

darstellen dürfen.

In einer vollständigen, aus einer Zeichenthematik sowie ihrer dualen Realitätsthematik bestehenden Zeichenrelation sind daher die Triadenwerte imaginär und die Trichotomienwerte reell, denn die Zeichenthematik konnotiert den Subjektpol und die Realitätsthematik den Objektpol der verdoppelten semiotischen Repräsentation. Da allerdings sowohl die Triaden- als auch die Trichotomienwerte immer zusammen aufscheinen – und zwar die ersteren hauptwertig in den Zeichenthematiken und stellenwertig in den Realitätsthematiken und die letzteren vice versa -, sind somit sowohl die Zeichen- als auch die Realitätsthematik beidermaßen Repräsentationen komplexer Zahlen, d.h. sie gehen in der Gaußschen Zahlenebene z.B. durch Achsenspiegelung und semiotisch natürlich durch Dualisation ineinander über.

2. Nun besteht, wenigstens historisch gesehen, der Hauptgrund für die Einführung noch höherer als der komplexen Zahlen, darin, daß es unmöglich ist, Rotationen (wenn also etwa die "Chiralität" von Repräsentationen zu berücksichtigen ist) im dreidimensionalen Raum der reellen Zahlen ($^3\mathbb{R}$) durchzuführen. Wie Hamilton entdeckte, funktioniert es aber durch Hinzunahme einer weiteren Dimension, d.h in $^4\mathbb{R}$. Daher sind also die den komplexen nächst höheren Zahlen nicht etwa "Ternionen", sondern Quaternionen, und wenn man diese so einführt, wie wir es hier getan haben, dann kann man sofort quaternionale Zeichenthematiken der Form

ZTh = a.i + b.j + c.k + .d mit a, ..., d ∈ {1, 2, 3}

sowie quaternionale Realitätsthematiken der Form

RTh = d. + k.c + j.b + i.a

konstruieren. Da die komplexen Zahlen der Formen (a.i), (b.j), (c.k) gemäß Voraussetzung nur Triadenwerte sein können, und da (.d) klarerweise für Trichotomienwerte steht, hat also eine quaternionale Zeichenrelation die allgemeine Form

$ZR_{\mathbb{H}}$ = (((3.2.1.)i). a) mit a ∈ {.1, .2, .3} (a also linksordinal).

Literatur

Toth, Alfred, Zeichen und komplexe Zahl. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012a

Toth, Alfred, Links- und rechtsordinale semiotische Zahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012b

12.5.2012